УДК 66.021.3:66.011

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В ОБРАТНООСМОТИЧЕСКОМ АППАРАТЕ ТРУБЧАТОГО ТИПА

© В.Л. Головашин, С.И. Лазарев, В.В. Мамонтов

Ключевые слова: математическая модель, аппараты трубчатого типа.

Предложена математическая модель, описывающая нестационарный массоперенос в обратноосмотическом аппарате трубчатого типа. Адекватность математической модели проверена с использованием обратноосмотической мембраны ESPA для минерализированной технической воды на лабораторной установке с модулем трубчатого типа. Получены расчетные формулы для определения средней производительности и среднего давления в трубчатом баромембранном аппарате. Выявлены основные закономерности нестационарного процесса обратноосмотического разделения.

ВВЕДЕНИЕ

Для описания и объяснения явления массопереноса при обратном осмосе, а также для построения математических моделей и расчета данного процесса используются различные подходы и уравнения переноса растворенного вещества и растворителя через мембрану для жидкой и мембранной фазы [1–4].

При проектировании баромембранных процессов необходимо знать основные параметры для простейшей схемы обратноосмотического разделения (рис. 1).

Основными параметрами для каждой схемы являются: K – коэффициент удержания; V, c – объем, м^3, и концентрация, кг/м^3, в емкости исходной жидкости; G_f, G_k, G_p – расход исходной жидкости, концентрата и пермеата, кг/с; c_f, c_k, c_p – концентрация растворенных веществ в исходной жидкости, концентрате и пермеате, кг/м^3.

Зная параметры для простейшей схемы обратноосмотического разделения и производительность по одному из потоков (в зависимости от цели процесса – разделение или концентрирование), можно рассчитать время разделения, необходимую площадь мембран для каждой стадии процесса и тем самым определить конструктивные параметры обратноосмотической установки.

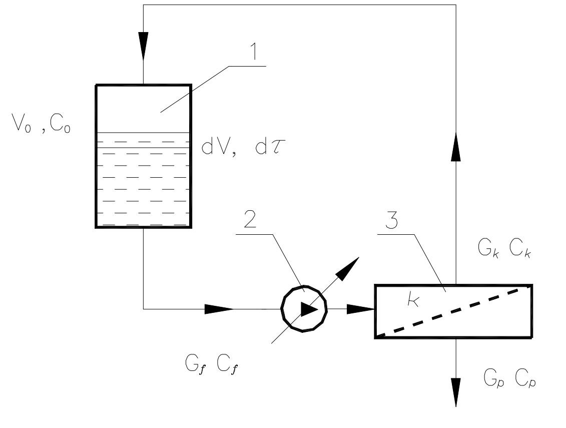

Рис. 1. Схема обратноосмотического разделения. 1 – исходная емкость; 2 – насос; 3 – трубчатый мембранный модуль

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим задачу массопереноса через мембрану при движении жидкости в кольцевидном канале, образованном цилиндрическим корпусом и трубкой (мембраной).

Основные допущения.

1. Насос обеспечивает постоянство подачи.
2. В промежуточной емкости режим идеального перемешивания.
3. Изменением плотности жидкости пренебрегаем.
4. Режим течения жидкости ламинарный Re < 2300.
5. Свойства мембраны учитываются коэффициентом удержания и удельной производительностью.

Математическая запись задачи:

Начальные условия:

$$V(0) = V_0 \tag{1}$$

$$c_f(0) = c_{f0} \tag{2}$$

Материальный баланс по растворителю в промежуточной емкости:

$$dV = -G_f \cdot d\tau + G_k \cdot d\tau \tag{3}$$

$$\frac{dV}{d\tau} = -G_f + G_k \tag{4}$$

Материальный баланс по растворенному веществу в промежуточной емкости:

$$d\left(V\cdot c_f\right)=-G_f\cdot c_f\cdot d\tau+G_k\cdot c_k\cdot d\tau \qquad (5)$$

Материальный баланс мембранного модуля по растворителю:

$$G_f=G_k+G_p \qquad (6)$$

Материальный баланс мембранного модуля по растворенному веществу:

$$c_f\cdot dV+V\cdot dc_f=-G_f\cdot c_f\cdot d\tau+G_k\cdot c_k\cdot d\tau \qquad (7)$$

Продифференцируем (5)

$$c_f\cdot dV+V\cdot dc_f=-G_f\cdot c_f\cdot d\tau+G_k\cdot c_k\cdot d\tau \qquad (8)$$

Подставим в (8) выражение из (7)

$$c_f\cdot dV+V\cdot dc_f=-G_f\cdot c_f\cdot d\tau+\left(G_f\cdot c_f-G_p\cdot c_p\right)\cdot d\tau \qquad (9)$$

Преобразуем (4) с использованием (6)

$$\frac{dV}{d\tau}=-G_p \qquad (10)$$

$$dV=-G_p\cdot d\tau \qquad (11)$$

Подставим (11) в (9)

$$-c_f\cdot G_p\cdot d\tau+V\cdot dc_f=-G_f\cdot c_f\cdot d\tau+\left(G_f\cdot c_f-G_p\cdot c_p\right)\cdot d\tau \qquad (12)$$

После несложных преобразований получим

$$V\cdot dc_f=c_f\cdot G_p\cdot d\tau-G_p\cdot c_p\cdot d\tau \qquad (13)$$

$$V\cdot dc_f=c_f\cdot G_p\cdot d\tau-G_p\cdot c_f\cdot\left(1-K\right)\cdot d\tau \qquad (14)$$

$$\frac{dc_f}{d\tau}=\frac{c_f\cdot G_p\cdot K}{V} \qquad (15)$$

Подставим в (15) и (10) выражение, определяющее удельную производительность модуля

$$\frac{dV}{d\tau}=-k\cdot\left(\Delta P-\Delta\pi\right)\cdot F_m \qquad (16)$$

$$\frac{dc_f}{d\tau}=\frac{c_f\cdot k\cdot\left(\Delta P-\Delta\pi\right)\cdot F_m\cdot K}{V} \qquad (17)$$

где τ – время разделения раствора, с; $\Delta\pi$ – осмотическое давление раствора, Па; F_m – площадь трубчатой мембраны, м^2.

Систему уравнений (16)–(17) интегрируем с учетом начальных условий (1) и (2).

Поскольку в аппарате насос обеспечивает постоянство подачи, а исследованные концентрации незначительно влияют на плотность разделяемого раствора, в каждый момент времени интегрирования можно сделать допущение о квазистационарности гидродинамических процессов в модуле.

Гидродинамика в мембранных каналах различных типов описывается уравнениями Навье-Стокса и неразрывности [1, 2]. Уравнения гидродинамики можно решить при некоторых допущениях [3]. Для нахождения поля скоростей в канале (в двухмерном случае) необходимо решать систему уравнений Навье-Стокса и неразрывности, которая для ламинарного режима принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \qquad (18)$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}=\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 U\left(x,y\right)}{\partial y^2}\right) \qquad (19)$$

Проинтегрируем уравнение (19) с учетом условий прилипания на стенках канала:

$$U\left(x,R_1\right)=U\left(x,R_2\right)=0 \qquad (20)$$

$$0<x<L; \qquad (21)$$

$$R_1<y<R_2. \qquad (22)$$

Для ламинарного стационарного потока получено следующее решение уравнений гидродинамики:

$$U(x,y)=\frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(y^2-y\cdot R_1-y\cdot R_2+R_1\cdot R_2\right)\cdot\frac{dP\left(x\right)}{dx} \qquad (23)$$

где $P(x)$ – распределение давления по длине канала, Па; μ – вязкость раствора, Па·с; $R_{1,2}$ – радиусы трубчатой мембраны и корпуса, м.

Определим неизвестную величину P(x).

Запишем уравнение расхода через канал.

$$Q(x,y)=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(y^2-y\cdot R_1-y\cdot R_2+R_1\cdot R_2\right)\cdot\frac{dP\left(x\right)}{dx}\cdot dy \qquad (24)$$

После интегрирования имеем

$$Q(x)=\frac{1}{12}\cdot\frac{\frac{dP\left(x\right)}{dx}}{\mu}\cdot\left(R_1^3-R_2^3-3\cdot R_1\cdot R_2^2-3\cdot R_2\cdot R_1^2\right) \qquad (25)$$

Для нахождения давления продифференцируем уравнение расхода по x

$$dQ(x)=\frac{1}{12}\cdot\frac{\frac{d_2P\left(x\right)}{dx^2}}{\mu}\cdot\left(R_1^3-R_2^3-3\cdot R_1\cdot R_2^2-3\cdot R_2\cdot R_1^2\right)\cdot dx \qquad (26)$$

С другой стороны, изменение расхода в канале записывается выражением

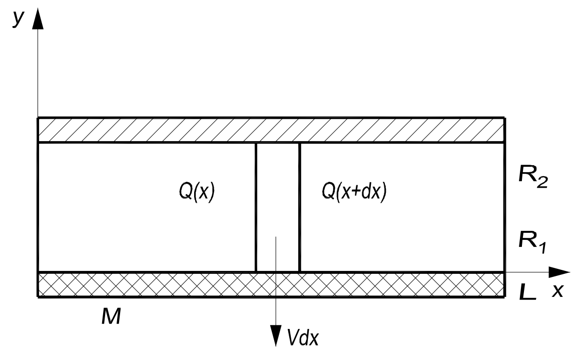

Рис. 2. Схема изменения расхода в канале

$$dQ(x) = Q(x+dx) - Q(x) = V(x) \cdot dx = k \cdot P(x) \cdot dx \quad (27)$$

На рис. 2 показана схема изменения расхода в канале, образованном цилиндрическим корпусом и мембраной.

Приравняем правые части уравнений (26)–(27) и проинтегрируем с учетом граничных условий:

$$P(0)=P_n; \quad (28)$$

$$P(L)=P_k. \quad (29)$$

Получено следующее выражение для распределения давления по длине канала:

$$P(x) = \frac{P_n \cdot \cosh(A \cdot x) \cdot \sinh(A \cdot x) - P_n \cdot \cosh(A \cdot L) \cdot \sinh(A \cdot x) + P_k \cdot \sinh(A \cdot x)}{\sinh(A \cdot L)} \quad (30)$$

где $P_{n\,,\,k}$ – давление в начале и конце канала;

$$A = \frac{2\sqrt{-3 \cdot k \cdot \mu \cdot (R_1 - R_2)^3}}{(R_1 - R_2)^3} \quad (31)$$

где k – водопроницаемость мембраны, м^3/м^2·с·Па.

Среднюю производительность на границе канала можно записать как:

$$G_{psr} = k \cdot P_{sr} \quad (32)$$

Среднее давление по длине канала:

$$P_{sr} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L P(x) \cdot dx \quad (33)$$

Данные выражения подставляем в уравнения (16) и (17), пренебрегая перепадом осмотического давления, ввиду малых концентраций исследованных веществ, и заменяя перепад давления через мембрану средним значением давления в канале. Средний коэффициент удержания определяем по формуле:

$$K = 1 - \frac{1}{1 + (\gamma - 1)\left[1 - \exp\left(-\frac{G_{psr} \cdot h \cdot \gamma}{D_0}\right)\right] \cdot \exp\left(-\frac{G_{psr} \cdot \delta}{D_0}\right)} \quad (34)$$

где γ – равновесный коэффициент распределения; h – толщина активного слоя мембраны, м; D_0 – коэффициент диффузии в растворе, м^2/с; δ – толщина пограничного диффузионного слоя, м.

Для проверки адекватности математической модели были проведены эксперименты по разделению многокомпонентных растворов минерализированной технической воды на лабораторной обратноосмотической установке с мембранным модулем трубчатого типа, представленным на рис. 3. Эксперименты проводились при постоянном давлении (4 МПа) и температуре (293 К), с использованием обратноосмотической мембраны ESPA.

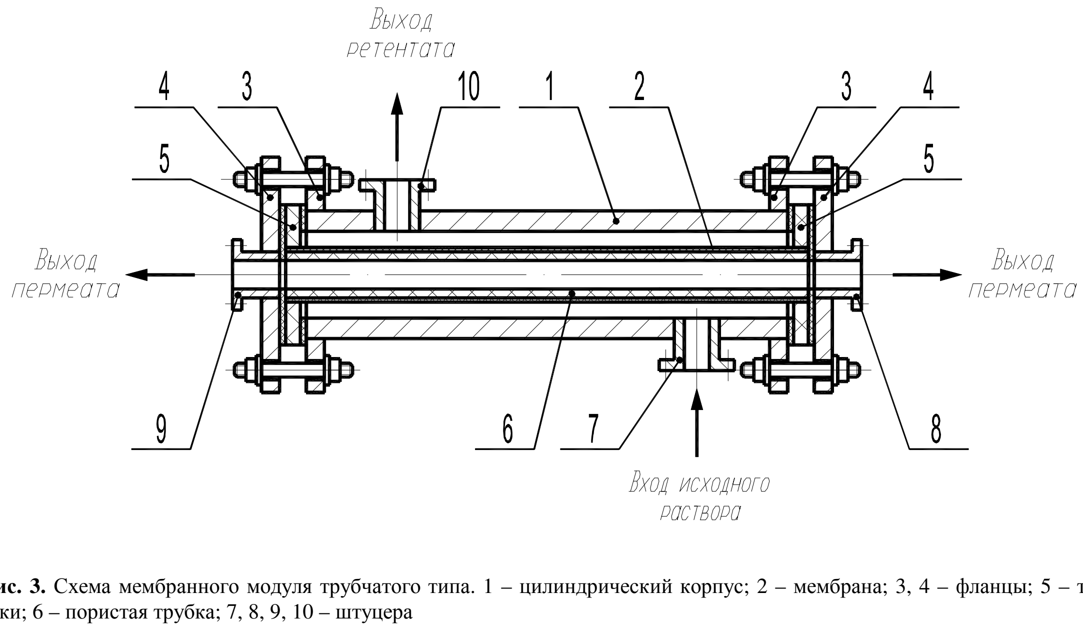

Рис. 3. Схема мембранного модуля трубчатого типа. 1 – цилиндрический корпус; 2 – мембрана; 3, 4 – фланцы; 5 – трубные решетки; 6 – пористая трубка; 7, 8, 9, 10 – штуцера

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проверка адекватности математической модели заключалась в сравнении расчетных и экспериментальных значений технологических параметров процесса обратноосмотического разделения: 1. концентрации и объема раствора в исходной емкости; 2. коэффициента удержания и производительности по пермеату, для исследованных систем раствор-мембрана, в зависимости от времени ведения процесса.

Основные результаты экспериментов и расчета изображены на рис. 4–7. Из графиков видно, что расхождение между экспериментальными и расчетными данными не превышает ±15 %, что свидетельствует о приемлемости разработанной математической модели реальным массообменным процессам в обратноосмотических аппаратах трубчатого типа. Полученные результаты можно использовать при проектировании и расчете обратноосмотических установок и технологических схем баромембранного разделения.

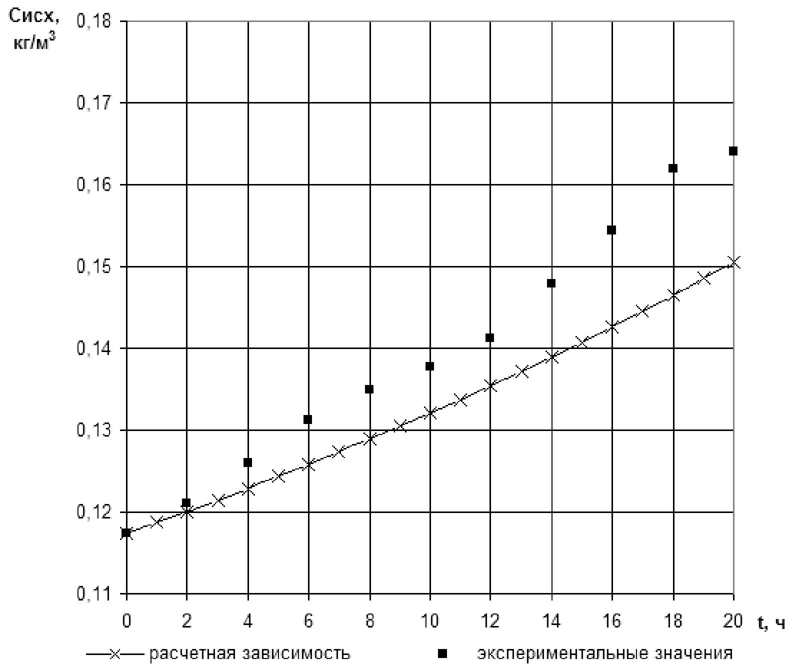

Рис. 4. Зависимость концентрации раствора в исходной емкости от времени концентрирования

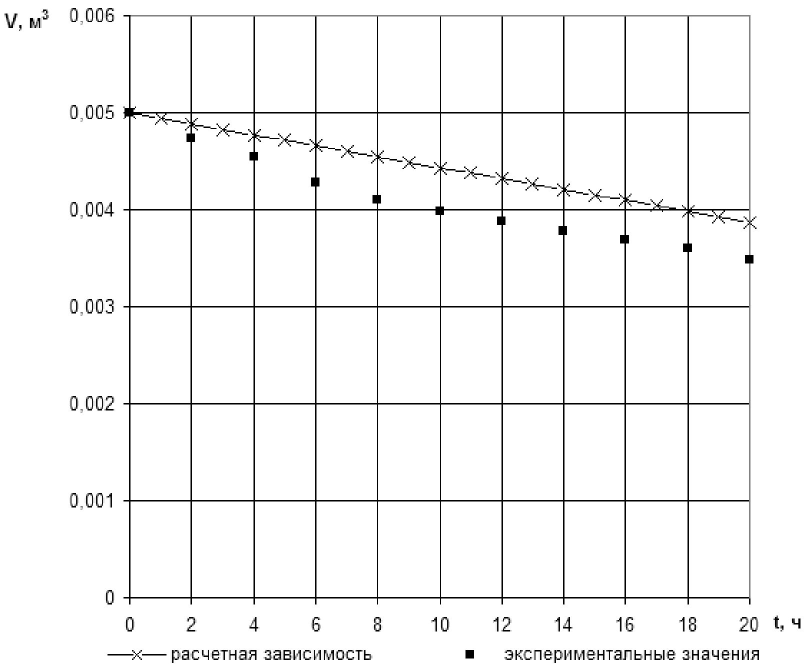

Рис. 5. Зависимость объема раствора в исходной емкости от времени концентрирования

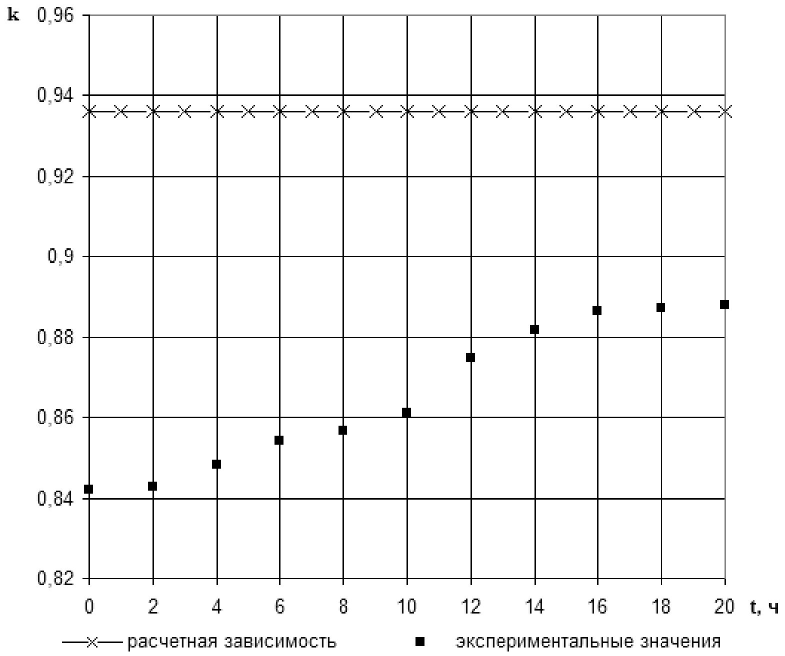

Рис. 6. Зависимость коэффициента удержания от времени концентрирования

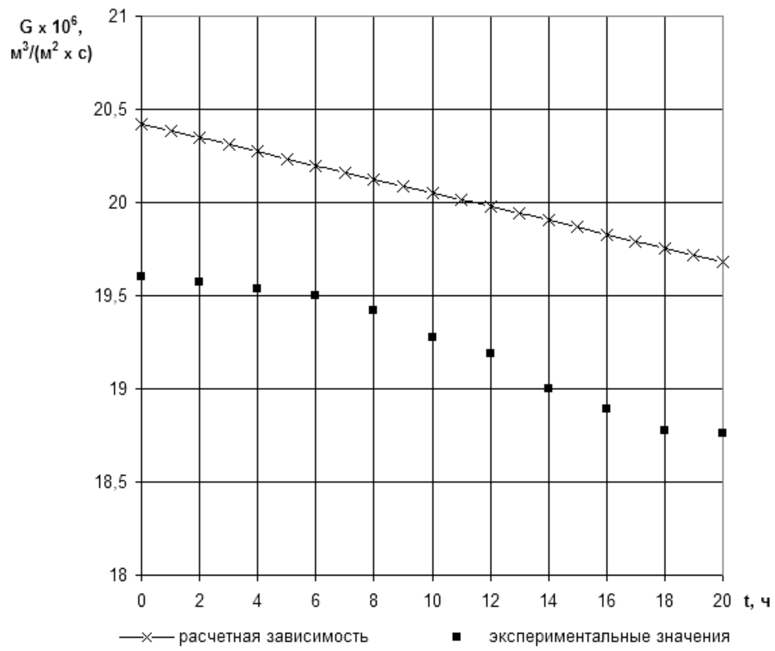

Рис. 7. Зависимость удельной производительности по пермеату от времени концентрирования

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дытнерский Ю.И.* Баромембранные процессы. Теория и расчет. М.: Химия, 1986.
2. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Верезуб и др. М.: Наука, 1997.
3. Химическая гидродинамика. Справочное пособие / Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д. и др. М.: Квантум, 1996.
4. *Чураев Н.В.* Физикохимия процессов массопереноса в капилярно-пористых телах. М.: Химия, 1990.

Поступила в редакцию 6 сентября 2008 г.

Golovashin V.L., Lazarev S.I., Mamontov B.B. Mathematical model of mass transfer in reverse osmosis device of tubular type. The mathematical model describing non-stationary mass transfer in a reverse osmosis device of tubular type is offered. Adequacy of the mathematical model is checked using a reverse osmosis membrane ESPA for mineral technical water on laboratory installation with a module of tubular type. Calculation formulas for definition of an average productivity and average pressure in a tubular reverse osmosis device are obtained. The basic laws of non-stationary process of reverse osmosis divisions are revealed.

Key words: mathematical model, device of tubular type.

LITERATURE

1. *Dytnersky Y.I.* Baromembrane processes. Theory and calculation. M.: Khimiya, 1986.
2. Mathematical modelling of convective heat and mass exchange on the basis of Navier-Stokes' equations / V.I. Polezhaev, A.V. Bune, N.A. Verezub, etc. M.: Nauka, 1997.
3. Chemical hydrodynamics. Handbook / Kutepov A.M., Polyanin A.D., Zapryanov Z.D., etc. M.: Kvantum, 1996.
4. *Churaev N.V.* Physics and chemistry of processes of mass transfer in capillary-porous bodies. M.: Khimiya, 1990.